LINEARE ALGEBRA

Elementare Vektorrechnung

Teil 1

Darstellung von Vektoren als Linearkombinationen

Lineare Un-/Abhängigkeit - Basis

Die Lösungen der Aufgaben befinden sich in der Datei 61102
auf der Mathematik-CD

Stand 10. November 2015

Datei Nr. 61101

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text bringt Erklärungen und Beispiele zum Thema „**Elementare Vektorrechnung**".
Hier geht es noch um keinerlei Anwendungen, also spielt die Geometrie mit ihren Pfeilvektoren noch keine Rolle. Die hier verwendeten Vektoren sind Paare, Tripel usw. Und zwar sowohl in der Zeilen- wie auch in der Spaltendarstellung.

Zunächst sollte man lernen, warum Vektoren so heißen und wie man mit ihnen rechnen kann. Dabei kommen hier nur die Addition und die S-Multiplikation vor. Skalarprodukt und Vektorprodukt haben in der elementaren Vektorrechnung noch nichts zu suchen. Sie kommen erst später hinzu (Texte 64100 und 66101).

Das Schwierigste ist für Schüler immer das Arbeiten mit Linearkombinationen. Dies nimmt hier auch einen breiten Raum ein. Dazu gehören dann die Eigenschaften der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit. Und dann kommen die Begriffe Basis und Dimension dazu.

Hier endet für viele Schüler der Unterrichtsstoff, weil man im G8 keine Zeit mehr hat, sich um eine weitere Vertiefung zu kümmern. Die folgenden Paragraphen, die sich noch mehr um lineare Abhängigkeit, um die lineare Hülle sowie um Basiswechsel kümmern, werden daher weitgehend für Studenten interessant sein. Das Thema Untervektorräume ist in den Text 61110 ausgelagert. Soviel ich weiß, ist dies aus den Lehrplänen gestrichen worden. Früher war es in BW Abiturstoff.

Resümee: Schüler, die diesen Text lesen, werden auswählen müssen, aber das ist ja fast immer so.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Inhalt

Die Lösungen der Trainingsaufgaben stehen im Text 61102

§ 1 Was sind Vektoren?

Die Vektorrechnung ist ein großes Teilgebiet der Algebra. Man nennt sie auch **lineare Algebra**, weil es vor allem um lineare Gleichungen und Gleichungssysteme geht. Die Algebra befasst sich mit Zahlen, Termen, Umformungen, Gleichungen usw. Es geht in der Algebra vor allem darum, dass man zeigt, welche Berechnungen möglich sind, welche Verfahren es gibt usw.

Dabei spielen Rechenregeln oder Rechengesetze eine fundamentale Rolle. Wenn man die Verkehrsregeln nicht kennt, sollte man sich nicht in den Straßenverkehr begeben. Und wer die Rechenregeln nicht beherrscht, macht in der Algebra Fehler.

Rechnen beruht immer auf der Umsetzung bekannter Rechenregeln. Man lernt, wie man addiert, multipliziert, subtrahiert und dividiert. Und man lernt dabei, dass man beispielsweise nicht durch 0 dividieren kann. Ein nettes Beispiel für die Anwendung einer nicht existenten Rechenregel ist diese falsche Berechnung: $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2}+\sqrt{4}=x+2$.

Dass sie falsch ist, erkennt man, wenn man für x eine Zahl einsetzt, etwa x = 5.

Dann wird daraus: $\sqrt{5^2+4}=5+2=7$, in Wirklichkeit ist aber $\sqrt{5^2+4}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ und nicht 5.

Hier wurde diese nicht gültige „Regel" angewandt: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Mit ihr kann man auch zeigen, dass 5 = 7 ist: Einerseits ist $\sqrt{16+9}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

Andererseits gilt: $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Diesen Fehler entdecken Mathelehrer nicht selten, sogar noch bei Abiturienten.

Was bedeutet Rechnen im weitesten Sinne? Man könnte sagen: Zahlen nach bestimmten Regeln verknüpfen und so neue Zahlen (Rechenergebnisse) ermitteln. Dies kann man aber auch mit anderen Objekten als Zahlen machen. Wir werden im Anschluss lernen, mit Zahlenpaaren oder Tripeln zu „rechnen", später mit geometrischen Objekten, die man Pfeilklassen nennt: Text 63005

Jetzt kommt bereits der Begriff „Vektor" ins Spiel:

Es sei V eine Menge von Objekten, für die zwei Rechenoperationen definiert sind: Die erste nennt man Addition, die zweite Vielfachbildung (= S-Multiplikation). Wenn für diese Berechnungsarten bestimmte festgelegte Gesetze gelten, dann nennt man diese Objekte Vektoren und ihre Menge V einen **Vektorraum**.

Das besagt einfach, dass Vektoren Objekte sind, mit denen man nach bestimmten Regeln rechnen kann. Diese Regeln müssen wir kennenlernen.

Zur Schreibweise: Vektoren versieht man in der Regel mit einem Zusatzpfeil: $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots$ sind Bezeichnungen für Vektoren. Da die Addition von Vektoren keine Addition von Zahlen ist, verwendet man auch oft dafür ein eigenes Zeichen: $\vec{a}\oplus\vec{b}$. Die meisten Autoren und Lehrer verwenden aber dennoch das Zahlenadditionszeichen + dafür.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Grundgesetze (Axiome) eines Vektorraums

Die Grundlagen der Vektor-Verknüpfungen sind:

Die **Addition** ist innere Verknüpfung, d.h. das Ergebnis der Verknüpfung zweier Vektoren ist wieder ein Vektor: Wenn $\vec{a} \in V$ und $\vec{b} \in V$, dann muss $\vec{a} + \vec{b} \in V$ sein.

Die **S-Multiplikation** ist eine äußere Verknüpfung:

Wenn $\vec{a} \in V$ und $r \in \mathbb{R}$, dann muss $r \cdot \vec{a} \in V$ sein.

Vorgeschriebene Rechengesetze für die Vektoraddition:

(A1) Für alle $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c} \in V$ gilt das Assoziativgesetz: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(A2) Es gibt genau ein Element $\vec{o}$, sodass für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$
Dieses Element heißt neutrales Element oder auch Nullvektor.

(A3) Zu jedem Element $\vec{a} \in V$ existiert ein $\left(-\vec{a}\right)$, so dass gilt: $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \left(-\vec{a}\right) + \vec{a} = \vec{o}$
Der Vektor $\left(-\vec{a}\right)$ heißt inverses Element zu $\vec{a}$.

(A4) Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt das Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Vorgeschriebene Rechengesetze für die S-Multiplikation:

(S1) Für alle $\vec{a} \in V$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (rs) \cdot \vec{a}$
(Gemischtes Assoziativgesetz)

(S2) Für alle $\vec{a} \in V$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt: $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
(1. Distributivgesetz)

(S3) Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$
(2. Distributivgesetz)

(S4) Für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Hinweise dazu.

a) Das Assoziativgesetz (A1) regelt, dass es egal ist, wie man die Klammern setzt. Daher darf man auch $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ohne Klammern schreiben, obwohl die später folgende Definition nur klären wird, wie man zwei Vektoren addiert. Aber durch (gedankliche) Klammernsetzung kann man dann auch mehr als zwei Vektoren addieren.

b) Aus diesen Regeln lassen sich **weitere Rechengesetze** folgern, so dass man sie nicht in der obigen Liste der Grundgesetze aufführen muss. Beispiele:

(1) $-1 \cdot \vec{a} = \left(-\vec{a}\right)$ - So erzeugt man das inverse Element von $\vec{a}$.

(2) $-r \cdot \vec{a} = r \cdot \left(-\vec{a}\right) = -\left(r \cdot \vec{a}\right)$

(3) Gilt $r \cdot \vec{a} = \vec{o}$, dann folgt $r = 0$ oder $\vec{a} = \vec{o}$ (Nullprodukt).

(4) Umgekehrt gilt auch: $0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$ und $r \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

(5) Die Gleichung $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$ hat den Lösungsvektor $\vec{x} = \vec{b} + \left(-\vec{a}\right)$.

Diese Gesetze kennen wir alle aus der Welt der Zahlen. Dass sie auch bei Vektoren gelten (die wir ja noch gar nicht kennen), muss man eigentlich erst beweisen, was ich dem Unterricht überlasse. Anfänger nehmen sie gerne als selbstverständlich hin.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

§ 2 n-Tupel sind Vektoren

n-Tupel sind zum Beispiel Zahlenpaare, Tripel, Quadrupel usw.:

$\mathbb{R}^2$ ist die Menge aller reellen Zahlenpaare, wie $(2\,|\,7)$, $\left(\frac{3}{4}\,|\,-5\right)$, $\left(0\,|\,\sqrt{2}\right)$ usw.

$\mathbb{R}^3$ ist die Menge aller reellen Zahlentripel, wie $(0\,|\,1\,|\,2)$, $\left(3\,|\,\frac{1}{2}\,|\,-5\right)$ usw.

$\mathbb{R}^4$ ist die Menge aller reellen Zahlenquadrupel, wie $\left(4\,|\,\frac{1}{3}\,|\,-2\,|\,5\right)$ usw.

$\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller reellen n-Tupel in der Form $(a_1\,|\,a_2\,|\,...\,|\,a_n)$.

Man kann n-Tupel auch in der Spaltenschreibweise verwenden: $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$.

Darauf verzichte ich vorerst, denn diese Spaltenvektoren haben noch eine andere Bedeutung (§11, Seite 32 ff.) Man kann mit ihnen aber genauso rechnen und alle folgenden Überlegungen auch in der Spaltenschreibweise durchführen.

Satz 1

Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet einen Vektorraum mit diesen Verknüpfungen

Addition: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\,|\,a_2)+(b_1\,|\,b_2):=(a_1+b_1\,|\,a_2+b_2)$

S-Multiplikation: $r\cdot\vec{a}=r\cdot(a_1\,|\,a_2)=(ra_1\,|\,ra_2)$

Satz 2

Die Menge $\mathbb{R}^3$ bildet einen Vektorraum mit diesen Verknüpfungen

Addition: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)+(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3):=(a_1+b_1\,|\,a_2+b_2\,|\,a_3+b_3)$

S-Multiplikation: $r\cdot\vec{a}=r\cdot(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)=(ra_1\,|\,ra_2\,|\,ra_3)$

Ein „Satz" ist in der Mathematik eine Aussage, die bewiesen werden muss. Dies soll an dieser Stelle teilweise geschehen. Lehrer zeigen die Gültigkeit der Axiome oft nur an Hand von Beispielen.

(A1) ***Ein Beispiel*** für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes im $\mathbb{R}^3$.

Es sei $\vec{a}=(2\,|\,5\,|\,-1)$, $\vec{b}=(10\,|\,7\,|\,3)$ und $\vec{c}=(-6\,|\,-2\,|\,3)$:

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left[(2\,|\,5\,|\,-1)+(10\,|\,7\,|\,3)\right]+(-6\,|\,-2\,|\,3)=(12\,|\,12\,|\,2)+(-6\,|\,-2\,|\,3)=(6\,|\,10\,|\,5)$

$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=(2\,|\,5\,|\,-1)+\left[(10\,|\,7\,|\,3)+(-6\,|\,-2\,|\,3)\right]=(2\,|\,5\,|\,-1)+(4\,|\,5\,|\,6)=(6\,|\,10\,|\,5)$

Damit wurde $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ bestätigt.

Führt man diese Rechnung allgemein durch, ist es ein Beweis.

(A2) Das neutrale Element, also der Nullvektor, ist $\vec{o}=(0\,|\,0\,|\,0)$, denn es gilt (Beweis):

$\vec{a}+\vec{o}=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)+(0\,|\,0\,|\,0)=(a_1+0\,|\,a_2+0\,|\,a_3+0)=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)=\vec{a}$

(A3) Das Inverse zu $\vec{a}=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)$ ist $(-\vec{a})=(-a_1\,|\,-a_2\,|\,-a_3)$, denn es gilt (Beweis):

$\vec{a}+(-\vec{a})=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)+(-a_1\,|\,-a_2\,|\,-a_3)=(a_1-a_1\,|\,a_2-a_2\,|\,a_3-a_3)=(0\,|\,0\,|\,0)=\vec{o}$

(A4) Beweis des Kommutativgesetzes:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)+(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)=(a_1+b_1\,|\,a_2+b_2\,|\,a_3+b_3)$

$\vec{b}+\vec{a}=(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)+(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)=(b_1+a_1\,|\,b_2+a_2\,|\,b_3+a_3)$.

Weil das Kommutativgesetz für die Addition reeller Zahlen gilt, sind beide Ergebnisse identisch.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(S1) Beispiel für die Gültigkeit von $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (rs) \cdot \vec{a}$

$$2 \cdot \left(3 \cdot (4 \,|\, 5 \,|\, 7)\right) = 2 \cdot (12 \,|\, 15 \,|\, 21) = (24 \,|\, 30 \,|\, 42)$$

$$(2 \cdot 3) \cdot (4 \,|\, 5 \,|\, 7) = 6 \cdot (4 \,|\, 5 \,|\, 7) = (24 \,|\, 30 \,|\, 42)$$

(S2) Beispiel für die Gültigkeit: $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

$$3\vec{a} + 2\vec{a} = (3+2)\vec{a} = 5\vec{a}$$

(S3) Beweis für die Gültigkeit von $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$:

$$r \cdot \left[(a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3) + (b_1 \,|\, b_2 \,|\, b_3)\right] = r \cdot (a_1 + b_1 \,|\, a_2 + b_2 \,|\, a_3 + b_3) = \left(r(a_1+b_1) \,|\, r(a_2+b_2) \,|\, r[a_3+b_3]\right)$$

$$= (ra_1 + rb_1 \,|\, ra_2 + rb_2 \,|\, ra_3 + rb_3)$$

$$r \cdot (a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3) + r \cdot (b_1 \,|\, b_2 \,|\, b_3) = (ra_1 \,|\, ra_2 \,|\, ra_3) + (rb_1 \,|\, rb_2 \,|\, rb_3) = (ra_1 + rb_1 \,|\, ra_2 + rb_2 \,|\, ra_3 + rb_3)$$

(S4) Beweis für die Gültigkeit von $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$:

$$1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot (a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3) = (1 \cdot a_1 \,|\, 1 \cdot a_2 \,|\, 1 \cdot a_3) = (a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3) = \vec{a}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

§ 3 Einführung einer Vektorsubtraktion

Beim Zahlrechnen lernt man, dass $8+(-3)=8-3$ gilt. Dies übernimmt man, um für Vektoren eine Subtraktion zu definieren.

Die Grundgesetze von Vektoren sagen uns, dass es zu jedem Vektor einen inversen Vektor gibt. Daher kann man für alle Vektoren definieren:

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

Hinweis: := liest man „sei“

Für Tripel sieht das beispielsweise so aus:

$(8\,|\,5\,|\,3)-(3\,|\,5\,|\,2)$ wird definiert als $(8\,|\,5\,|\,3)+(-3\,|\,-5\,|\,-2)=(8-3\,|\,5-5\,|\,3-2)$

Man erkennt, dass man den Zwischenschritt über die Addition des Inversen weglassen kann.

Man rechnet also so: $(8\,|\,5\,|\,3)-(3\,|\,5\,|\,2)=(8-3\,|\,5-5\,|\,3-2)=(5\,|\,0\,|\,1)$.

Für die Subtraktion gibt es auch Rechenregeln.

Aber: **Das Assoziativgesetz gilt für die Subtraktion nicht.**

Man darf also die Klammern nicht umsetzen: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c}\neq\vec{a}-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$!

Beispiel: $\left[(9\,|\,8\,|\,2)-(6\,|\,3\,|\,2)\right]-(5\,|\,3\,|\,3)=(3\,|\,5\,|\,0)-(5\,|\,3\,|\,3)=(-2\,|\,2\,|\,-3)$

$(9\,|\,8\,|\,2)-\left[(6\,|\,3\,|\,2)-(5\,|\,3\,|\,3)\right]=(9\,|\,8\,|\,2)-(1\,|\,0\,|\,-1)=(8\,|\,8\,|\,3)$!!

Daraus folgt eigentlich diese Konsequenz: Wenn es nicht egal ist, wie man die Klammern setzt, dann darf man sie auch nicht weglassen. Also hätte dieser Term $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ eigentlich keinen Sinn. Es gibt jedoch – um Klammern zu sparen – wie bei Zahlen die Festlegung, dass man in diesem Fall so rechnen muss, wie wenn die Klammern links gesetzt wären:

Es gilt also per Festlegung: $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}:=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c}$

Dagegen muss man dies beachten; $\vec{a}-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

und $\vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

§ 4 Linearkombinationen

Definition:

Unter einer Linearkombination von Vektoren versteht man eine Summe von Vielfachen, z. B.: $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$.

GRUNDAUFGABE 1: Erzeugen von Linearkombinationen

a) Aus $\vec{a} = (3|-1|6)$ und $\vec{b} = (2|1|-6)$ erzeuge ich diese Linearkombinationen:

$\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b} = 5(3|-1|6) + 2(2|1|-6) = (15|-5|30) + (4|2|-12) = (19|-3|18)$

$\vec{d} = -\vec{a} - 4\vec{b} = (-3|1|-6) - (8|4|-24) = (-11|-3|18)$

$\vec{e} = 3\vec{a} + 3\vec{b} = (9|-3|18) + (6|3|-18) = (15|0|0)$

b) Gegeben sind $\vec{a} = (2|1|1)$; $\vec{b} = (-1|1|-3)$; $\vec{c} = (3|3|-1)$

Daraus bilde ich diese Linearkombinationen:

$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = (6|3|3) - (-2|2|-6) + (9|9|-3) = (17|10|6)$

$\vec{e} = 5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (10|5|5) - (-1|1|-3) + (6|6|-2) = (17|10|6)$

$\vec{f} = -\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c} = (-2|-1|-1) + (-4|4|-12) + (3|3|-1) = (-3|6|-14)$

c) Aus $\vec{a} = (1|1|2)$; $\vec{b} = (1|2|1)$ und $\vec{c} = (2|1|1)$ erzeuge ich

$\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = (3|3|6) + (1|2|1) - (4|2|2) = (0|3|5)$

Trainingsaufgabe 1

a) Gegeben sind diese Vektoren des $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = (3|1)$, $\vec{b} = (-2|5)$ und $\vec{c} = (1|0)$.

Berechne daraus $\vec{d} = 4\vec{a} - 7\vec{b}$, $\vec{e} = -3\vec{b} + 5\vec{c}$ und $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b} - 6\vec{c}$

b) Gegeben sind die vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} = (4|1|-1)$, $\vec{b} = (1|0|2)$, $\vec{c} = (-2|2|3)$, $\vec{d} = (-1|1|0)$

Berechne damit diese Linearkombinationen:

$\vec{x}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{c}$, $\vec{x}_2 = \vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{x}_3 = 10\vec{a} - 5\vec{b} - 7\vec{c} + 3\vec{d}$

$\vec{x}_4 = \frac{3}{4}\vec{c}$, $\vec{x}_5 = 4\vec{d} - 2\vec{a} + 3\vec{b}$ $\vec{x}_6 = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} - 4\vec{d}$.

c) Gegeben sind diese Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$\vec{a} = (3|1|0|5), \vec{b} = (2|-1|1|2), \vec{c} = (3|5|1|1), \vec{d} = (0|1|0|-7)$

Berechne daraus $\vec{x}_1 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$, $\vec{x}_2 = 4\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{x}_3 = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} - 4\vec{d}$

Lösungen für alle Trainingsaufgaben im Text 61102

Demo-Text für www.mathe-cd.de